<u>Unidad V</u>

Relaciones

5.1 Conceptos básicos.

AREJA ORDENADA

Se dice que una pareja ordenada es un esquema en el que un elemento **x** de un conjunto estä relacionado con un elemento y de otro conjunto.

Una pareja ordenada así definida se escribirá de la siguiente manera: **(x, y)**, donde **x** pertenece al primer conjunto e **y** pertenece al segundo conjunto.

PRODUCTO CARTESIANO

El poducto cartesiano de dos conjuntos cualesquiera **A** y **B**, será un nuevo conjunto, identificado como **AxB**, y consistirá de un conjunto de parejas ordenadas, **(x, y)**, donde **x** pertenece al conjunto **A** e **y** pertenece al conjunto **B**.

EXPRESIÓN EXTENSIVA DE UN PRODUCTO CARTESIANO

Sean los conjuntos **A** y **B**.

Esté **A** definido como **A={a, b, c}**
Esté **B** definido como **B={m, n, o}**

El producto cartesiano **AxB** estará definido como:

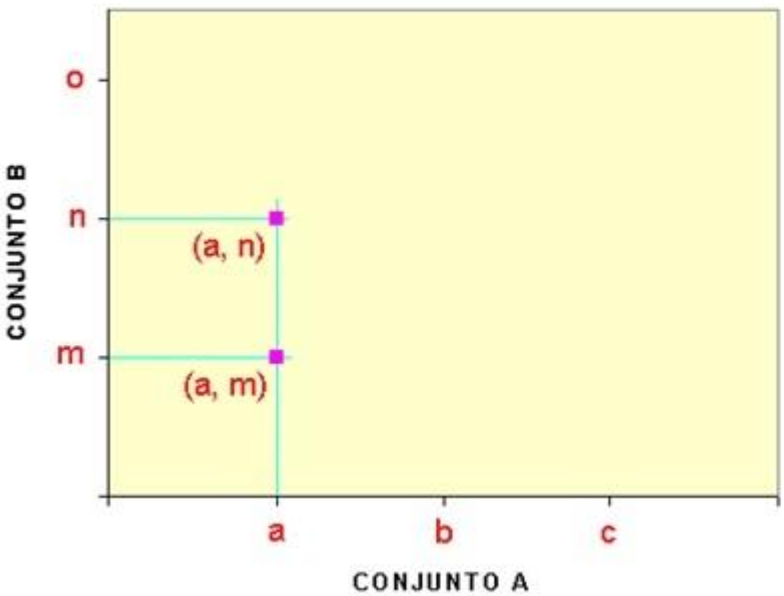
AxB={(a, m), (a, n), (a, o), (b, m), (b, n), (b, o), (c, m), (c, n), (c, o)}
El producto cartesiano **BxA** estará definido como:

BxA={(m, a), (m, b), (m, c), (n, a), (n, b), (n, c), (o, a), (o, b), (o, c)}

EXPRESIÓN GRAFICA DE UN PRODUCTO CARTESIANO

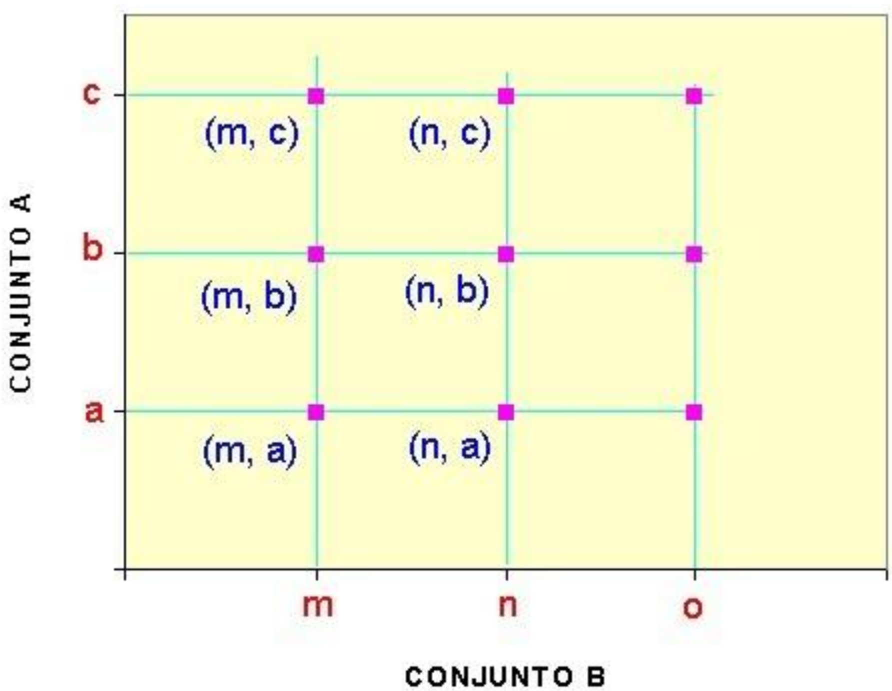
Las parejas ordenadas representarán PUNTOS COORDENADOS en el plano, tomando como primera coordenada un elemento del primer conjunto, y como segunda coordenada a un elemento del segundo conjunto, independientemente que sean números u otras entidades.

En la siguiente gráfica se ilustra el desarrollo gráfico del producto cartesiano **AxB**:



Se puede comparar con el desarrollo gráfico del producto cartesiano **BxA**, referido anteriormente:

PRODUCTO CARTESIANO BxA



5.1.1 Producto cartesiano

Producto cartesiano

Considere dos conjuntos arbitrarios A y B. El conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) en

donde $a \in A$ y $b \in B$ se llama producto o producto cartesiano de A y B.

La definición de producto cartesiano puede extenderse fácilmente al caso de más de dos

conjuntos.

Se llama producto cartesiano de dos conjuntos A y B y se representa A x B, al conjunto de

pares ordenados (a, b), tales que el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo

elemento al segundo conjunto. Es decir:

$A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$

El producto cartesiano, en general, no es conmutativo. Es decir: $A \times B \neq B \times A$.

Puede ocurrir que los conjuntos A y B sean coincidentes.

EJEMPLO

Si A = {a, b, c} y B = {1, 2, 3, 4}, el producto cartesiano es:

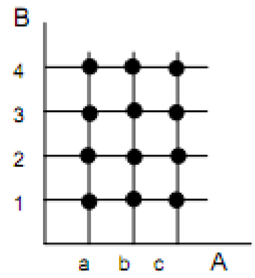
A x B = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)}

Se puede representar gráficamente por medio de puntos en un plano, como se muestra a

continuación. Aquí, cada punto P representa una pareja ordenada (a, b) de números reales y

viceversa; la línea vertical a través de P encuentra al eje x en a, y la línea horizontal a través de P

encuentra el eje y en b. A esta representación se le conoce como diagrama cartesiano.



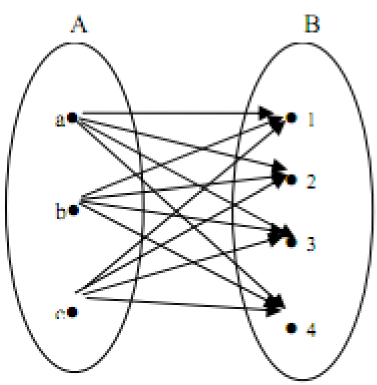
Hay otra manera de visualizar una relación y es a través de una representación gráfica, donde se

destaquen los puntos en el plano que pertenecen a A y los puntos que pertenecen a B. Se trazan

flechas que indican la relación que existe entre cada elemento del conjunto A y su

correspondiente en el conjunto B. A esta representación gráfica se le conoce como un diagrama

de flechas.



5.1.2 Relación binaria

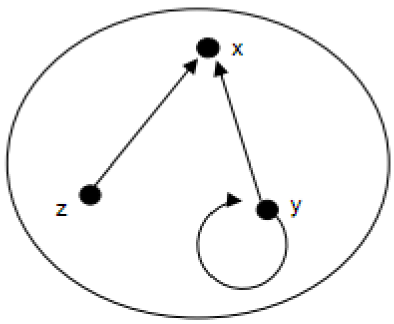
Relación binaria

La relación binaria definida en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano A x A.

EJEMPLO

Sea el conjunto A = {x, y, z}. El grafo de la siguiente figura representa una relación binaria

definida en A, puesto que los pares (x, z), (y, x) (y, y) constituyen un subconjunto de A x A.



Se dice que dos elementos a y b están relacionados, y se escribe a R b, “a está relacionado con b

mediante la relación binaria R”, cuando el par ordenado (a, b) pertenece al subconjunto del

producto cartesiano que define la relación.

Si dos elementos a y b no están relacionados mediante R en algún sentido, escribiremos a R   b o

b R a o ambas cosas.

Propiedades de una relación binaria

Las principales propiedades que puede presentar una relación binaria R definida en un conjunto A

se indican en la siguiente tabla, junto con sus respectivas condiciones.

Propiedad	Condición
1. Reflexiva	$\nabla\, a \in A,\ a\ R\ a$
2. Antireflexiva	$\nabla\, a \in A,\ a \not R\ a$
3. Simétrica	$\nabla\, a, b \in A,\ a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$
4. Antisimétrica en sentido amplio	$\nabla\, a, b \in A, (\, a\ R\ b$ y $b\ R\ a) \Rightarrow a = b$
5. Antisimétrica en sentido estricto	$\nabla\, a, b \in A,\ a \not R\ b \Rightarrow\ b \not R\ a$
6. Transitiva	$\nabla\, a, b, c \in A,\ (a\ R\ b$ y $b\ R\ c) \Rightarrow a\ R\ c$

5.1.3 Representación de relaciones (matrices, conjuntos, grafos, diagrama de flechas)

Propiedad	Condición
1. Reflexiva	$\nabla\, a \in A,\ a\ R\ a$
2. Antireflexiva	$\nabla\, a \in A,\ a \not R\ a$
3. Simétrica	$\nabla\, a, b \in A,\ a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$
4. Antisimétrica en sentido amplio	$\nabla\, a, b \in A, (\, a\ R\ b$ y $b\ R\ a) \Rightarrow a = b$
5. Antisimétrica en sentido estricto	$\nabla\, a, b \in A,\ a \not R\ b \Rightarrow\ b \not R\ a$
6. Transitiva	$\nabla\, a, b, c \in A,\ (a\ R\ b$ y $b\ R\ c) \Rightarrow a\ R\ c$

5.2 Propiedades de las relaciones (Reflexiva, Irreflexiva, Simétrica, Asimétrica, Antisimétrica, Transitiva).

Una relación R en un conjunto A es **reflexiva** si (a, a) £ R para todas las a £ A, esto es, si a R e para todas las a e A. Una relación R en un conjunto A es **irreflexiva** si **a** R a para toda a £ A.

Por consiguiente, R es reflexiva si cada elemento a e A está relacionado consigo mismo y es irreflexiva si ningún elemento está relacionado consigo mismo.

Ejemplo 1:

(a) Sea Δ = [(a, a)\ a £ A], de modo que A es la relación de **igualdad** en el conjunto A. Entonces A es reflexiva, ya que (a, a) £ Δ para todas las a e A.

(b) Sea R = {(a, b) e A x A | a + b}, R es la relación de **desigualdad** en el conjunto A. Entonces R es irreflexible, ya que (a, a) £ R para todas las x € A.

(c) Sean A = {1, 2, 3}. y Jí = {(1, 1), (1, 2)}. Entonces A es reflexiva ya

(2,2) R y (.3,3) € R. Por otra parte, R no es irreflexiva, ya que (1, l) € R.

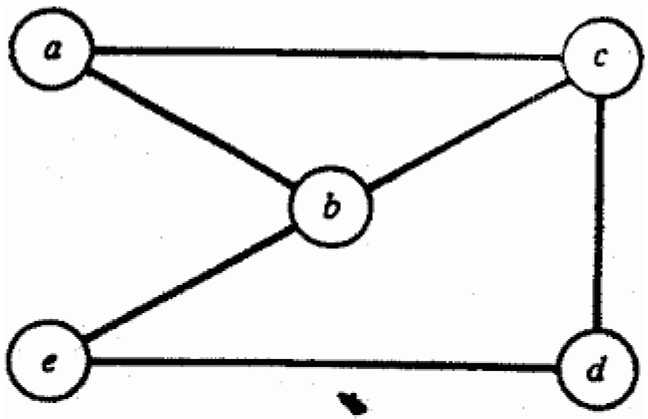
(d) Sea A un conjunto no vacio. Sea R = Ǿ A x A, la **relación vacía.** Enlaces R no es reflexiva, ya que (a, a) € R para todas las a € A (el conjunto vacío tiene elementos). Sin embargo, R es irreflexiva.

Relaciones Simétricas y Asimétrica

Una relación R en un conjunto A es simétrica si cuando a R b, entonces b R a. De esto se sigue que R no es simétrica se tiene a y b € A con a R b, pero b R a. Una relación R en un conjunto A es asimétrica si cuando a R b, entonces b Ra. De esto se sigue que R no es simétrica si se tiene a y b e A con ambos a R b y b R a.

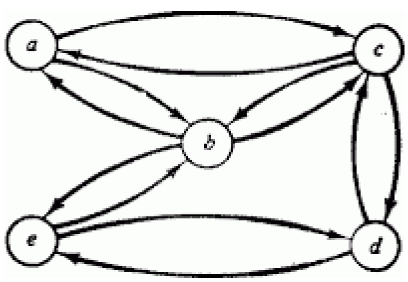
Una relación R en un conjunto A es **asimétrica** si cuando a R b y b R a, entonces a = b. Otra forma de expresar esta definición es diciendo que R es anti simétrica si cuando a ≠ b, se tiene a R b o b R a. De esto se sigue que R no es anti simétrica si se tiene a y b en A. a ≠ b, y ambas a R b y b R a.

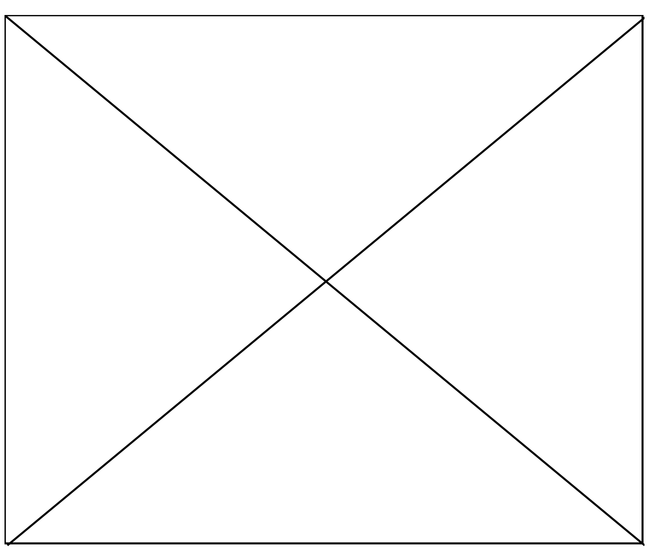
Ejemplo Sea A «= [a, b, c, d, e} y sea R la relación simétrica dada por
R = {(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (b, e), (e, b), (e, a), (a, e), (c,a), (a,c)}
El grafo dirigido de R se muestra en la figura 2(a), mientras que en la figura



Grafo de R

(b)

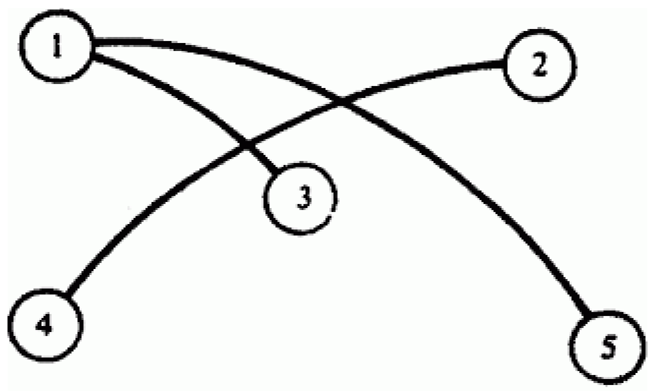




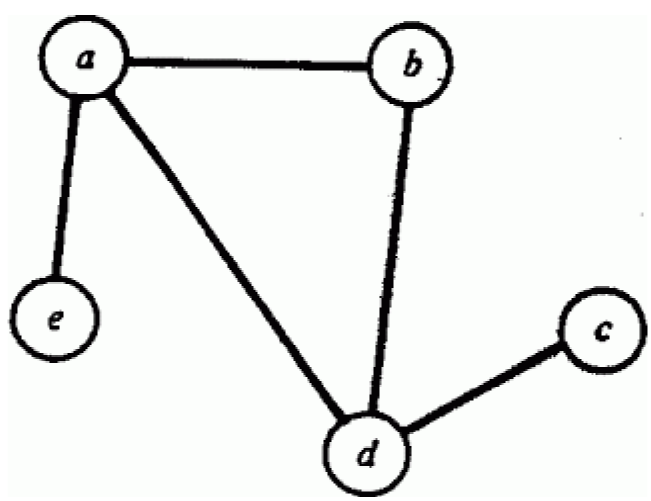
Grafo dirigido **de R Grafo** dirigido **de R**

Aparece el grado de *R.* Obsérvese que cada arista no dirigida corresponde a dos pares ordenados en la relación *R.*

A una relación simétrica *R* en un conjunto *A* se le llamará **conexa** si existe una trayectoria de cualquier elemento de *A* a cualquier otro elemento de *A.* Esto significa sencillamente que el grafo de *R* está todo en una pieza. En la figura 3 se muestran los grafos de dos relaciones simétricas. El grafo de la figura 3(a) está conectado mientras que el de la figura 3(b) no lo está.



(b)



Relaciones Transitivas

Se dice que una relación *R* en un conjunto *A es* **transitiva** si cuando *a R b y b R e,* entonces *a R c. Se* sigue que *R* no es transitiva si y sólo si se puede encontrar elemento *a, b y c* en *A* tal que *a R b y b R c,* pero *a R c.*
Ejemplo: Sea *A = Z* el conjunto de los enteros y sea *R* la relación considerada en el ejemplo 2 Para ver si *R* es transitiva, se supone que *a R b y b R c.* Por consiguiente, *a < b; b < c.* Entonces se sigue que *a < c,* por lo cual *a R c.* De aquí que *R* sea transitiva.

Una relación *R* en un conjunto *A es* transitiva si y sólo si satisface las siguientes propiedades: Si existe una trayectoria de longitud mayor que 1 del vértice a al vértice *b,* hay una trayectoria de extensión 1 de *a* a b (esto es, a está relacionada con *b).* Establecido algebraicamente, *R es* transitiva si y sólo si *Rn* £ *R* para todas las *n* ≥ 1.

Es posible caracterizar la relación transitiva por su matriz MR = [mij] así:

si mij =1 y mjk = 1, entonces mik = 1

Para ver qué significa transitividad en términos del grafo dirigido de una relación, se traducirá esta definición a términos geométricos.

Si se examinan los vértices particulares a y c, las condiciones a R b y b R c

ocurrirán si y sólo si existe una trayectoria de longitud 2 de a a c, esto es, si y sólo si a R2 c. Es posible replantear la definición de transitividad como sigue: Si a R2 c, entonces a R c, esto es, R2 £ R (como un subconjunto de A x A).

5.3 Relaciones de equivalencia (Cerraduras, Clases de equivalencia, Particiones)

Cerradura de una relación

Definición. Sea R una relación en un conjunto A. Una cerradura reflexiva **ref(R)** de R en A es la “menor” relación que la incluye y que es reflexiva, con símbolos: (∀ R’ reflexiva) (A ⊆ R’ ⊆ ref(R)) ⇒ R’ = ref(R)) Una cerradura simétrica **sim(R)** de R en A es la “menor” relación que la incluye y que es simétrica, con símbolos: (∀R’ reflexiva) (A ⊆ R’ ⊆ ref(R)) ⇒ R’ = ref(R))

Una cerradura transitiva **trans(R)** de R en A es la “menor” relación que la incluye y que es transitiva, con símbolos: (∀ R’ reflexiva) (A ⊆ R’ ⊆ ref(R)) ⇒ R’ = ref(R)

La cerradura reflexiva y la cerradura simétrica de una relación es muy simple de encontrar, solamente se le agregan los pares necesarios de una forma directa. Cuando conocemos la matriz asociada a la relación, la forma de encontrar las cerraduras anteriores es muy simple.

Teorema: Sea R una relación en A y M_R su matriz asociada. La cerradura reflexiva y la cerradura simétrica de R son únicas y se pueden obtener mediante las matrices siguientes
$M_{ref(R)} = M_R \cup I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden |A|.
$M_{sim(R)} = [a_{ij}]$, donde $a_{ji} = 1$ si $a_{ij} = 1$ en M_R.

La Matriz identidad I_n de orden n es:

{$ {(1,…,0), (vdots, ddots, vdots), (0,…,1)] $}

O sea que para lograr la cerradura reflexiva debemos agregar 1′s en la diagonal, para la cerradura simétrica debemos agregar 1′s en luagres simétricos a la diagonal principal donde existan 1′s.

Cierre de equivalencia

Para calcular el cierre de equivalencia de una relación binaria R sobre un conjunto A:

Calcularemos primero su cierre reflexivo, ρ(R)

Sobre el resultado calcularemos el cierre simétrico, σ(ρ(R))

finalmente el cierre transitivo del resultado anterior, τ (σ(ρ(R)))

Clases de Equivalencia

Al conjunto de los elementos del conjunto A que están relacionados con él se llama clase de equivalencia.

Ejemplo:

La relación a - b = 2.k (múltiplo de 2), siendo a y b números enteros es una relación de equivalencia porque cumple las propiedades: Reflexiva: a - a = 0 = 2.k (k = 0). Simétrica: a - b = b - a porque b - a = -(a - b). Si a - b es múltiplo de 2, -(a - b) también lo será. Transitiva: a - b = 2.k1 b - c = 2.k2 Sumando queda a - c = 2.k3 Entonces a - c es múltiplo de 2.

En el ejemplo anterior, la clase de equivalencia del número cero (uno de los elementos del conjunto de los números enteros) C(0) = {... -4, -2, 0, 2, 4, ...}, pues 0 - (-4) es múltiplo de 2, 0 - (-2) es múltiplo de 2 ya sí sucesivamente. La clase de equivalencia del número 1 será C(1) = {... -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...} pues la diferencia entre 1 y los números indicados es múltiplo de 2.

Del mismo modo podríamos calcular las clases de equivalencia de más números.

El conjunto formado por las clases de equivalencia se llama ***conjunto cociente.***

En el ejemplo anterior el conjunto cociente Z / 2 es el conjunto formado por las clases de todos los elementos Z / 2 = {C(0), C(1), C(2), ... }.

Particiones

Sea X un conjunto. P es una *partición* de X si y sólo si:

$\varnothing \notin P$

$\bigcup P = A$

Los conjuntos de P son disyuntos 2 a 2, es decir, si $S_1, S_2 \in P$ y $S_1 \neq S_2$ entonces $S_1 \cap S_2 = \varnothing$

Observe que si P es una partición de X, entonces todo elemento de X está en uno y sólo un elemento $S \in P$ uno y sólo un elemento de modo que parte a en conjuntos disyuntos. Por ejemplo, el conjunto de barriles propuesto al comienzo de la sección es una partición del conjunto de mangos. Otro ejemplo de una partición es de la división política de un país: El país (visto como un conjunto de personas) se parte en estados o departamentos no vacíos disyuntos entre sí.
Ejemplo

Sea ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Entonces = {{1, 9}, {2, 8}, {3, 4, 5, 6, 7}}
Es una partición de X en tres conjuntos: elementos externos (1,9), elementos semi-externos (2, 8) y elementos internos (3, 4, 5, 6, 7).
Note que Q = {{1, 2, 9}, {2, 8}, {3, 4, 5, 6, 7}} no es partición de X

5.4 Funciones (Inyectiva, Suprayectiva, Biyectiva).

Sean A y B conjuntos. Una función o transformación *f* de A a B, denotada por *f* : A → B es un subconjunto de A × B tal que **∀x(x ∈ A → ∃y (y∈B ∧ (x,y) ∈ f)) y ((x,y1) ∈ f ∧ (x, y2) ∈ f), y1=y2**

Sean A y B dos conjuntos no vacios. Una funcion de A en B, y que notaremos f :A −→ B, es una relacion de A a B en la que para cada a ∈ A, existe un unico elemento b ∈ B tal que (a, b) ∈ *f*. Si (a, b) ∈ *f*, escribiremos *f*(a) = b y diremos que b es la imagen de a mediante *f*. Las funciones se especifican de diferentes maneras, una de las cuales es por medio de fórmulas. *f*(x)=x+1.

Decimos que una relación es una función si para cada elemento del primer conjunto existe una única imagen. Si cada elemento del segundo conjunto es imagen de alguien, entonces la función es Sobreyectiva. Si cada elemento del segundo conjunto es, a lo sumo, imagen de un elemento del primer conjunto, entonces la función es Inyectiva. Si una función es sobreyectiva e inyectiva, entonces es Biyectiva.
En muchas ocasiones a cada elemento de un conjunto se le asigna un elemento particular de un segundo conjunto.

Definición 1. Sean A y B conjuntos. Una función f de A a B es una asignación de exactamente un elemento de B a cada elemento de A. Escribimos f (a)=b si b es el único elemento de B asignado por la función f al elemento a de f:A B A. Si f es una función de A en B, y se escribe 1 Matemáticas Discretas.

Por ejemplo suponer que a un grupo de carros se le asigna una letra del conjunto [A,B,C,D,G]. Suponer que se le asigna al Jaguar la A, al Audi la G, al Ferrari la D, al Porsche la B, y al Mercedes la A. La asignación se ilustraría así Jaguar Audi Ferrari Porsche Mercedes A B C D G.

Funciones Inyectivas

Sea *f* una función definida de A a B **f: A → B, x,y∈ A**

$\forall x \forall y\ (f(x)= f(y) \rightarrow x = y)$

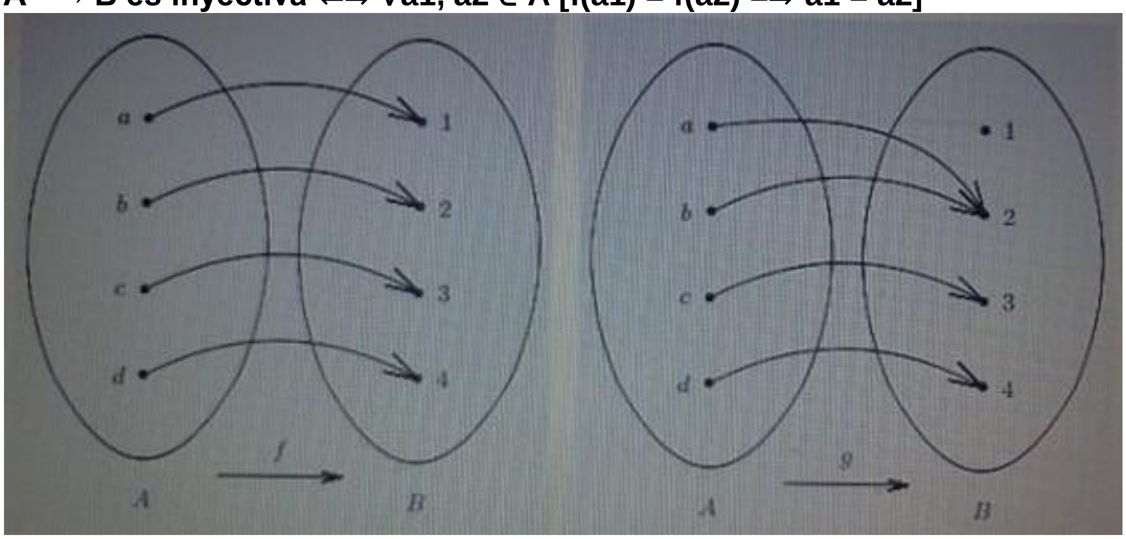
f es 1-1 o Inyectiva si sus pre imágenes son únicas, es decir **Si x ≠ y entonces $f(x) \neq f(y)$**

Una función *f* entre los conjuntos A y B se dice que es inyectiva, cuando cada elemento de la imagen de *f* lo es, a lo sumo, de un elemento de A. Suele decirse también que la función es uno-a-uno. Dicho de otra forma:

f :A −→ B es inyectiva ⇐⇒ ∀a1, a2 ∈ A [a1 =6 a2 =⇒ f(a1) =6 f(a2)]

La “mejor forma” de probar en la practica la inyectividad de una función es utilizar la contra reciproca,
es decir,

f :A −→ B es inyectiva ⇐⇒ ∀a1, a2 ∈ A [f(a1) = f(a2) =⇒ a1 = a2]



En la figura anterior *f* es inyectiva y g no lo es.

Ejemplo: Determinar si la función *f* :R −→ R tal que f(x) = x + 2 es inyectiva.

Solución

En efecto, sean x_1 y x_2 dos n´umeros reales cualesquiera, entonces

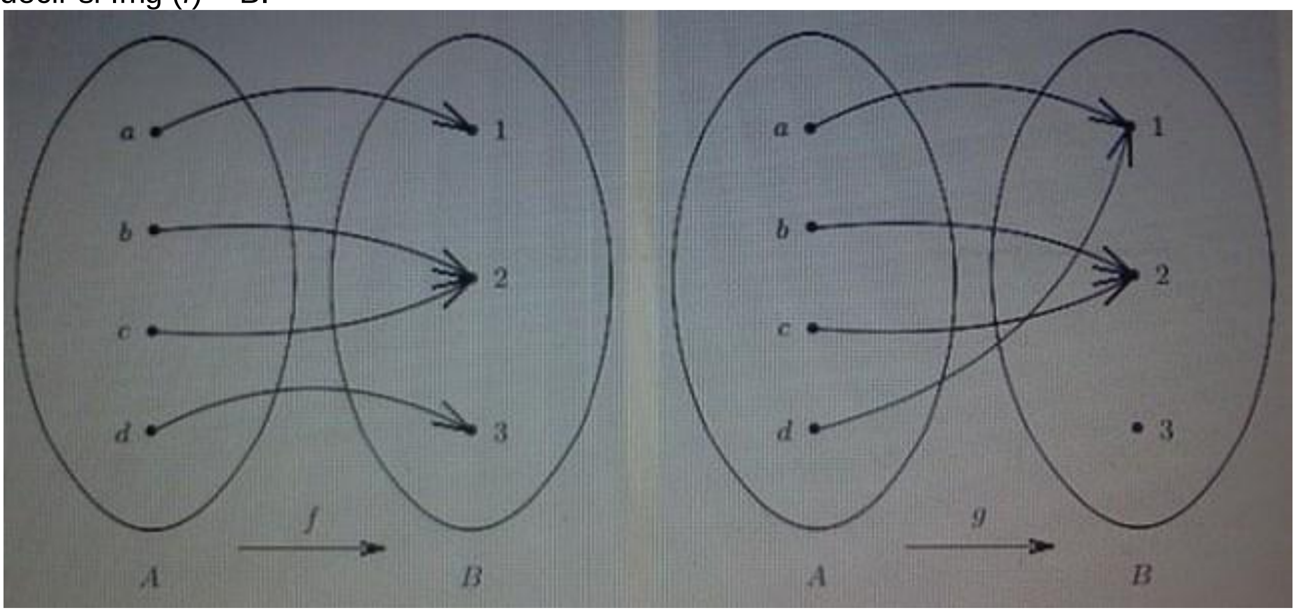
$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$ luego *f* es inyectiva.

Funcione Suprayectiva

Una funcion f entre los conjuntos A y B se dice que es suprayectiva, sobreyectiva o exhaustiva, cuando cada elemento de B es imagen de, al menos, un elemento de A. Es decir,

$$f : A \longrightarrow B \text{ es suprayectiva} \Longleftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

En otras palabras, *f* es sobreyectiva si la imagen de *f* es todo el conjunto B, es decir si Img (*f*) = B.



En la figura anterior *f* es suprayectiva y, sin embargo g no lo es.

Funcion Biyectiva

Una función *f* entre los conjuntos A y B se dice que es biyectiva, cuando es, a un tiempo, inyectiva y suprayectiva.

Ejemplo: Sea $f : A \longrightarrow B$ tal que $A = B = R$ y $f(x) = 2x - 3$, $\forall x \in A$. ¿Es biyectiva?

Solución

Veamos si es inyectiva y suprayectiva.

(a) Inyectiva. Sean x_1 y x_2 dos n´umeros reales arbitrarios. Entonces,

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$

luego f es inyectiva.

(b) Suprayectiva. Sea y cualquiera de B. Entonces,

$$y = 2x - 3 \Longleftrightarrow 2x = y + 3 \Longleftrightarrow x = y + 3 /2$$

luego tomando x = y + 3 / 2, se verifica que x ∈ A y

$$f(x) = f\,(y + 3) /2 = (2)\,((y + 3) / 2) - 3 = y$$

Consecuentemente,

$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$ o sea, *f* es suprayectiva. Por ser inyectiva y suprayectiva, f es biyectiva.

5.5 Aplicaciones de las relaciones y las funciones en la computación.

Uno de los conceptos más importantes en Matemáticas es el de función, ya que se puedeaplicar en numerosas situaciones de la vida cotidiana, y determinar las relaciones que existen entre magnitudes tanto en Matemáticas, Físicas, Economía, etc., y poder calcular el valor de una de ellas en función de otras de las que depende.

Ya desde hace años, se observaron fenómenos que estaban relacionados con otros, así el volumen de un gas a temperatura constante, está relacionado con la presión, la fuerza de atracción entre dos cuerpos se vio que estaba relacionada con la masa de esos cuerpos y la distancia que les separa, y el capital final de una inversión está determinado por el capital invertido y el tiempo que dure esa inversión, etc.

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES A DISTINTAS ÁREAS:
En cualquier área de las ciencias, existen leyes en las que se relacionan distintas magnitudes, temperatura-presión, masa-velocidad, intensidad del sonido-distancia, etc. Es decir, a partir de los valores de algunas magnitudes se obtienen los valores de otras de forma directa a través de fórmulas ya demostradas.
Un punto de origen del concepto de función nace precisamente de las relaciones que mantienen diferentes magnitudes, así pues la función se puede representar algebraicamente o de forma gráfica en la que se relacionan varias magnitudes entre sí.

Mediante la representación gráfica de estas relaciones entre diferentes magnitudes, se pudo dar de forma visual esa relación e interpretarla de forma rápida y sencilla. Una forma de representación es la que se hace mediante ejes cartesianos, en la que se la función se representa de forma general por la relación numérica de magnitudes en una gráfica.

Así pues, la función la podremos representar tanto gráficamente como mediante una expresión algebraica o fórmula.

Euler fue el primero en emplear la expresión f(x) para representar una función f asociada a un valor x. Es decir, con esta representación que es empleada hoy, se comienza la utilización del concepto de función tal y como hoy se entiende.

- Función en Cinemática:

El problema consiste en expresar la relación entre el espacio recorrido y el tiempo invertido en ello. Si queremos la función que representa el espacio recorrido por un móvil, con velocidad uniforme que parte del reposo e(t) = v * t que es una función del tipo f (x) = m * x cuya gráfica es una recta dependiente de m y que pasa por el origen de coordenadas.

Otro problema muy común y que su uso es muy estudiado es el lanzamiento de proyectiles. Las funciones son de tipo cuadrática de la forma y = ax 2 + bx + c . Por ejemplo, si queremos calcular la distancia que alcanza un objeto que es lanzado hacia arriba con una inclinación determinada α y a una velocidad inicial de lanzamiento v0 , en función del tiempo se puede representar de forma gráfica y algebraica:

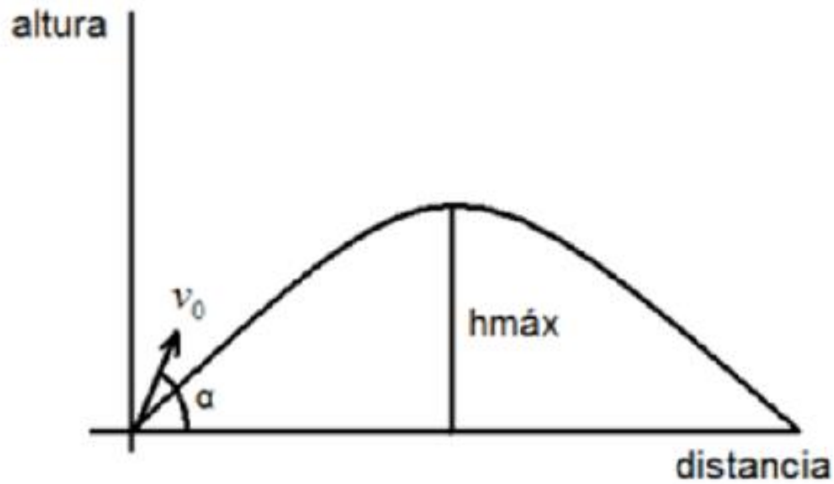
$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$v_x = v_0\ x$

$v_y = v_{0y} - gt$

Según las magnitudes que se quieran relacionar las expresiones tanto gráficas como algebraicas serán las adecuadas:



Función en Dinámica:

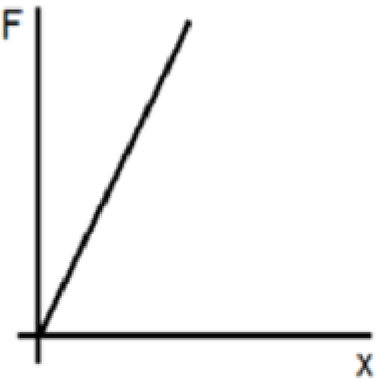
- Cuando una partícula tiene una trayectoria curvilínea, está sometida a una aceleración perpendicular a la trayectoria y dirigida hacia el centro de la curva, llamada aceleración centrípeta y cuya expresión es , esta aceleración es producida por una fuerza cuya expresión es F = M · a = expresión que es una función cuadrática.

También en dinámica se emplean funciones que describen fenómenos cotidianos. Las funciones se pueden obtener de forma experimental o por medio de fórmulas.

Representar por ejemplo la longitud que puede alcanzar un muelle desde el que se cuelga un peso viene dada por una función de tipo lineal del tipo y = ax + b que se representa por una recta.

También por la ley de Hooke F = K*x se puede determinar por medio de una tabla de valores o por una gráfica la fuerza o peso que se debe aplicar para que el muelle se desplace una cierta distancia.
Por ejemplo, si se tiene un muelle con una constante de elasticidad k = 0,5, podemos ir representando la relación entre las magnitudes fuerza-distancia

F	x
0	0
1	2
2	4



- Función en Energía:

  La energía cinética viene expresada por E_c = de tipo cuadrático.

- Función de crecimiento ilimitado:

  Responde a la forma $f(x) = a * b^{cx}$ con a, c>0 y b>1.

Es por ejemplo el crecimiento de la población $P_t = (1 + r') \cdot P_0$, donde P_t es el crecimiento de la población al cabo de t años, r ' es el crecimiento anual de la población de forma constante expresado en tanto por 1, P_0 es la población actual.

- Función de decrecimiento limitado:

  Su ecuación viene dada por $f(x) = a * b^{cx}$ con a>0, b>1 y c>0. Es por ejemplo la desintegración radiactiva cuya fórmula $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$, donde N_t es el número de átomos en el momento t, N_0 es el número de átomos radiactivos iniciales, λ es la constante de desintegración, t es el tiempo.

- Función de crecimiento limitado:

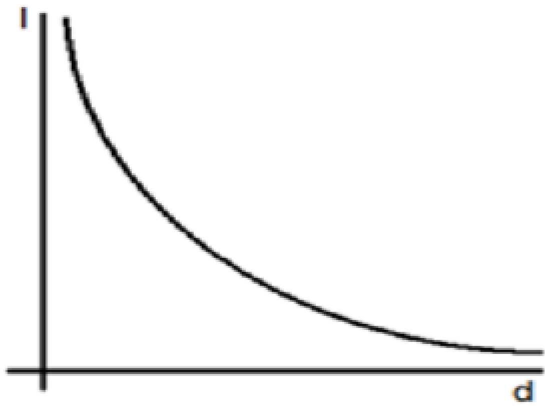
  Su ecuación es de la forma $f(x) = a*(1 - e^{-bx})$ con a>0. es por ejemplo las pruebas de memoria cuya fórmula viene dada por $n = n(1 - e^{-0,2x})$ donde n es el número de objetos que se pueden recordar y x es el número de minutos que se les muestran.

- Función del sonido:

  La intensidad del sonido que podemos percibir desde un punto sonoro llamado foco dependerá de la distancia a la que se encuentre el receptor desde el punto emisor del sonido.

  Así pues, esta intensidad que recibe el receptor vendrá dada por la fórmula: I = en la que I es la intensidad del sonido medida en decibelios y d es la distancia medida en metros a la que se encuentra el receptor del emisor.

  La función que representa las magnitudes intensidad del sonido-distancia es de la forma:



• Función de Economía:

Para el estudio de la función de costes de una empresa, cuando una empresa produce ciertos bienes, genera ciertos gastos llamados costes. Para tener una producción eficiente, la función de costes debe ser mínima.

La función de costes depende de la relación:

$C_t (Q) = C_v (Q) + C_f$

donde Q es la cantidad de producto producido, Ct es el coste total, Cv son los costes variables en función de la cantidad de producto producido y Cf son los costes fijos de producción.

• Función en Termodinámica:

La Ley de Boyle, nos dice que para un gas a temperatura constante, se verifica la siguiente relación
entre la presión y el volumen:

$$P \cdot V = K \Rightarrow P =$$

Su representación gráfica es una hipérbola equilátera cuyas asíntotas coinciden con los ejes de coordenadas. En este caso se representa mediante la rama positiva de la hipérbola, pues no tiene sentido hablar de presiones o volúmenes negativos.

Otras funciones importantes:

• Función en la Ley de la gravitación universal de Newton y Ley de Coulomb.
• Ley de la medida de la intensidad de una onda
• Escala de Richter M = log10 P
• Las funciones circulares: relacionadas con las vibraciones, propagación de ondas y
movimiento pendular